Title	次元論ニ就テ（I）
Author(s)	森田, 紀一
Citation	全国紙上数学談話会. 2(10) p.310-p.317
Issue Date	1948-07-25
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75239
rights	
Note	

105　次元論ニ就テ　I

東京高師　森田紀一（9.10）

正規空間 R ノ開被覆 $\mathfrak{G}$ ニ対シ $\mathfrak{G}$ ノ open refinement $\mathfrak{H}$ ガアッテ, $\mathfrak{H}$ ヲ R ノ部分集合 A ノ開被覆ト見ルトキ　ソノ次数ガ高々 $n+1$ デアル場合 $(\mathfrak{G})$-$\dim A \leqq n$ ト書ク. スベテノ有限開被覆 $\mathfrak{G}$ ニ対シ, $(\mathfrak{G})$-$\dim R \leqq n$ トナルコトガ即チ $\dim R \leqq n$ ナルコトデアル. $\mathfrak{G}$ トシテ有限被覆ノミデナク　アラユル countable normal covering ヲ考ヘ カール $\mathfrak{G}$ ニ対シテ $(\mathfrak{G})$-$\dim R \leqq n$ ガ成立スルノハ, $\dim R \leqq n$ ノ場合ニ限ルコトハ既ニ証明サレタ處デ

アル。[1] 此処デハ $\mathfrak{G}$ ガ局所有限ノ被覆ノ場合ヲ考察シヨウ。

以下ニ於テ空間Rハ常ニ正規空間デアルトスル。Rニ於ケル集合系 $\{A_\alpha\}$ ガ局所有限デアルトハ Rノ任意ノ点 p ニ対シ ソノ適当ナ近傍 $U(p)$ ヲトレバ、$U(p) \cdot A_\alpha \neq 0$ ナル A_α ノ個数ガ有限トナルコトヲイフ。然ルトキハ次ノ補題ガ成立スル。

$\boxed{\text{補題 1}}$ Rノ局所有限ノ開被覆 $\mathfrak{G} = \{G_\alpha ; \alpha \in \Omega\}$ ニ対シ $F_\alpha \subset G_\alpha$, $\alpha \in \Omega$ ヲミタス閉被覆 $\mathfrak{F} = \{F_\alpha ; \alpha \in \Omega\}$ ガ存在スル。

$\boxed{\text{補題 2}}$ $\mathfrak{G} = \{G_\alpha ; \alpha \in \Omega\}$ ハRノ局所有限ノ開集合系、$\mathfrak{F} = \{F_\alpha ; \alpha \in \Omega\}$ ハ閉集合系デ且ツ $F_\alpha \subset G_\alpha$, $\alpha \in \Omega$ トスル。スベテノ α ニ対スル *binary covering* $\{G_\alpha, R - F_\alpha\}$ ノ *intersection* ヲ $\mathfrak{G}'$ トスレバ、$\mathfrak{G}'$ ハ局所有限ノ開被覆デアツテ且ツ $S(F_\alpha, \mathfrak{G}') \subset G_\alpha$ ガ成立スル。

$\boxed{\text{補題 3}}$ $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{F}$ ハ補題2ノ條件ヲミタス集合系トスレバ $F_\alpha \subset U_\alpha$, $\overline{U_\alpha} \subset G_\alpha$, $\alpha \in \Omega$ ヲミタス開集合系 $\mathfrak{U} = \{U_\alpha ; \alpha \in \Omega\}$ ヲ適当ニ定メテ、$\{\overline{U_\alpha} ; \alpha \in \Omega\}$ ト $\mathfrak{F}$ トヲ相似ナラシメルコトガ出来ル。

之等ノ補題ヲ用ヒレバ、次ノ定理ガ証明サレル。

$\boxed{\text{定理 1}}$ $\mathfrak{G} = \{G_\alpha\}$ ハRノ局所有限ノ開被覆トスル。$\dim R \leqq n$ ナラバ、$(\mathfrak{G})\text{-}\dim R \leqq n$ デアル。[2]

証明 $\mathfrak{G}$ ノ *cardinal number* ガ $\aleph_\nu$ $(\nu \geqq 0)$ ヨリ小ナルトキハ、定理ハ既ニ証明サレタトモノトシ、$\mathfrak{G}$ ノ *cardinal number* ガ $\aleph_\nu$ ナルトキモ定理ガ成立スルコトヲ証明スル。コノタメ ω_ν ヲ $\aleph_\nu$ ノ *Anfangszahl* トシ、ω_ν ヨリ小ナル順序数 α ヲ添数ニツケテ $\mathfrak{G}$ ノ集合ヲ表ハスコトニスル。$\mathfrak{G} = \{G_\alpha ; \alpha < \omega_\nu\}$。以後簡単ノタメ $\Omega = \omega_\nu$ トオクコトニスル。

扨テ補題1ニヨリ

$$\mathfrak{F} = \{F_\alpha ; \alpha < \Omega\} \quad F_\alpha \subset G_\alpha$$

---

1) K. Morita, On the dimension theory of normal spaces, Jap. Jour. of Math 近刊.

(2) C.H. Dowker Lebesgue dimension of a normal space. (Abstract). Bull. of Amer. Math. Soc. 52. p. 283

ナル開被覆ガ存在スル. ココデ更ニ

$$F_\alpha' \subset L_\alpha,\ \bar{L}_\alpha \subset G_\alpha. \quad \alpha < \Omega$$

ナル開集合 L_α ヲトッテオク.

被覆 $\{U_\alpha\}$ ヲ作ルタメ 次ノ如クスル. 先ヅ $\alpha < \Omega$ ナル一ツノ順序数 α ニ對シ α ヨリ小ナル順序数 β ニ對シテハ既ニ

$$(OB)\begin{cases} \bar{U}_{\beta\delta} \subset L_\beta L_\delta\ ;\ \delta \leqq \beta : \quad U_{\beta\delta} = 0\ \ \delta > \beta \\ F_\beta' \subset \underset{\delta \leqq \epsilon}{E}\ U_{\beta\delta} \\ \{\overline{\sum_{\iota \leqq \delta} U_{\iota\gamma}}\ ;\ \gamma \leqq \beta\} \text{ノ次数} \leqq n+1 \end{cases}$$

ヲ滿足スル如キ開集合 $U_{\beta\delta}$ ガ作ラレタモノト仮定スル, コノドキ條件 (C_α) ヲ滿足スルヨウニ開集合 $U_{\alpha\gamma}$ ヲ作リ得ルコトヲ証明シヨウ.

$U_\gamma' = \sum_{\beta<\alpha} U_{\beta\gamma}$. $(\gamma < \alpha)$ トオケバ. $\{\bar{U}_{\beta\gamma}\ ;\ \beta < \alpha\}$ ハ局所有限デアルカラ $\bar{U}_\gamma' = \sum_{\beta<\alpha} \bar{U}_{\beta\gamma}$ ガ成立スル. コヽデ.

(1) $\{\bar{U}_\gamma'\ ;\ \gamma < \alpha\}$ ノ次数 $\leqq n+1$

ガ成立スルコトヲ証明シヨウ. コノタメ

$$x \in \bar{U}_{\gamma_i}',\quad i = 1, 2 \cdots\cdots ; n+2$$

トスレバ. 各 γ_i ニ対シ. $x \in \bar{U}_{\beta_i\gamma_i}'$ ナル $\beta_i < \alpha$ ガアル.

ココデ $\beta_i \leqq \beta < \alpha$ $(i = 1.2, \cdots ; n+2)$ ナル順序数 β ヲトレバ.

$x \in \sum_{\delta \leqq \beta} \bar{U}_{\delta\gamma_i}$ トナルガ, コヽデ更ニ $\gamma_i \leqq \beta$ $(i = 1.2, \cdots, n+2)$ ナル如ク β ヲトッテオケバ. コノコトハ條件 (C_β) ニ反スルコトガ分ル. 從ッテ (1) ガ成立スル

扨テ $\bar{U}_\gamma' \subset L_\gamma$ デ $\{L_\gamma\ ;\ \gamma < \alpha\}$ ハ局所有限デアルカラ 補題3ニヨリ

(2) $\bar{U}_\gamma' \subset V_\gamma \subset L_\gamma$. $\gamma - \alpha$

(3) $\{V_\gamma\ ;\ \gamma < \alpha\}$ ハ $\{\bar{U}_\gamma'\ ;\ \gamma < \alpha\}$ ト相似

ナル如キ開集合 V_γ ガ存在スル. 補題2ニヨレバ. *binary covering* $\{V_\gamma,\ R - \bar{U}_\gamma'\}$, $(\gamma < \alpha)$ ノ *intersection* $\mathfrak{V}$ ヲ作レバ. $\mathfrak{V}$ ハ局所有限ノ開被覆デ,

(4) $S(\bar{U}_\gamma', \mathfrak{V}) \subset V_\gamma$, $\gamma < \alpha$

トナル. 而モ $\mathfrak{V}$ ニ属スル集合ノ個数ハ, 順序数 α ノ属スル濃度ヲ超エナイカラ ヤ

ハリ $\mathfrak{V}_\nu$ ヨリ小デアル．ソコデ $\mathfrak{V}'$ ニ属スル集合ト L_α トノ共通集合ヲ作レバ，之ハ F_α ノ開被覆デ而モ局所有限デ，ソノ濃度ハ $\aleph_\nu$ ヨリ小デアリ，$\dim F_\alpha \leqq \dim R \leqq n$ デアルカラ　帰納法ノ仮定ニヨリ，

(5) $\begin{cases} F_\lambda \subset \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda \qquad \bar{H}_\lambda \subset L_\alpha \\ \{\bar{H}_\lambda \,;\, \lambda\in\Lambda\} \text{ ハ } \mathfrak{V}' \text{ ノ } \mathit{refinement} \text{ デソノ次数} \leqq n+1 \text{ ナル開集} \end{cases}$

合 $H_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ ガ存在スル．ココデ $\{\bar{H}_\lambda \,;\, \lambda\in\Lambda\}$ ハ局所有限デアルトシテヨイ．何トナレバ $\mathfrak{V}'=\{V_\lambda ; \lambda\in\Lambda\}$ トスレバ，$\bar{H}_\lambda \subset V_\lambda \cdot L_\alpha$ ナル如ク H_λ ヲ定メウルカラデアル．

$\bar{U}'_1$ トスル $\bar{H}_\lambda$ ニ対シ，カヽル H_λ ノ和ヲ作リ之ヲ H'_1 トシ，次ニ $\bar{U}'_1$ ト交ラズ，$\bar{U}'_2$ トスル $\bar{H}_\lambda$ ニ対シ，カヽル H_λ ノ和ヲ作リ之ヲ H' トシ，以下同様ニシテ H_β $(\beta<\alpha)$ ヲ作ル．

之等ノ集合 H_β ニ入ラナカツタ H_λ ノ和集合ヲ $U_{\alpha\alpha}$ トシ，

(6) $\qquad U_{\alpha\gamma} = H_\gamma \,,\quad \gamma<\alpha$

トオケバ，カカル $U_{\alpha\gamma}$ ハ條件 (C_α) ヲ満足スル．之ヲイフニハ，

$\left\{\overline{\sum_{\xi\leqq\alpha} U_{\xi\gamma}} \,;\, \gamma\leqq\alpha\right\}$ ノ次数 $\leqq n+1$ ヲ示セバヨイ．コノタメニハ

(7) $\qquad \{\bar{U}'_\gamma + \bar{H}'_\gamma \,,\ \gamma<\alpha \,;\, \bar{U}_{\alpha\alpha}\}$ ノ次数 $\leqq n+1$

ヲ証明スレバヨイ．扨テ

$$X=\prod_{i=1}^{r}(\bar{U}'_{\gamma_i}+\bar{H}'_{\gamma_i})\cdot\bar{U}_{\alpha\alpha}\neq 0$$

トスレバ，$\bar{U}'_\gamma \cdot \bar{U}_{\alpha\alpha}=0$ ヨリ $X=\prod\limits_{i=1}^{r}\bar{H}_{\gamma_i}\cdot\bar{U}_{\alpha\alpha}\neq 0$．ヨッテ (5)ヨリ $r+1\leqq n+1$，又

$$X=\prod_{i=1}^{r}(\bar{U}'_{\gamma_i}+H'_{\gamma_i})\neq 0$$

ナラバ，

$$\bar{U}'_\gamma+\bar{H}'_\gamma\subset S(\bar{U}'_\gamma,\mathfrak{V}')\subset V_\gamma$$

ナルコトト (3)，(4) トヨリ，$r\leqq n+1$ ヲ得ル，従ツテ何レニシテモ (7) 成立スル．

以上ニヨリ $\Omega>\beta$ ナルスベテノ順序数 β ニ就ノ條件 (C_β) ヲ満足スル開集合 $U_{\beta\delta}$ ノ存在ガ証明サレタ．ソコデ，

$$U_\alpha' = \sum_{\sigma<\Omega} U_{\sigma\alpha} \qquad \alpha<\Omega$$

トオケバ.

$$U_\alpha \subset L_\alpha \subset G_\alpha, \qquad \alpha<\Omega$$

デアリ. 且ツ.

$$R=\sum_{\alpha<\Omega} F_\alpha \subset \sum_{\alpha<\Omega}\Big(\sum_{\gamma\leqq\alpha} U_{\alpha\gamma}\Big) = \sum_{\alpha<\Omega} U_\alpha$$

トナルカラ $\mathfrak{U}=\{U_\alpha\,;\alpha<\Omega\}$ ハRノ開被覆デアルガ. 更ニ$\mathfrak{U}$ノ次数ハ高々$n+1$デアル. 何トナレバ.

$$x \in U_{\alpha_i}, \qquad i=1,2,\cdots,n+2$$

トスレバ.

$$x \in U_{\sigma_i\alpha_i}\,; \qquad i=1,2,\cdots,n+2$$

ナルσ_iガアル. ソコデ $i=1,2,\cdots,n+2$ニ對シ $\sigma_i\leqq\beta$, $\alpha_i\leqq\beta$. $\beta\leqq\Omega$ ナル順序数βヲトレバ.

$$x \in \sum_{\sigma\leqq\beta} U_{\sigma\alpha_i}, \qquad i=1,2,\cdots,n+2$$

トナル. 之ハ條件(C5)ニ反スル. ヨツテ$\mathfrak{U}$ノ次数ハ高々$n+1$デアル。ヨツテ定理1ハ証明サレタ.

上述ノ証明カラ次ノ定理ノ成立ガ知ラレル.

定理2 $\mathfrak{G}=\{G_\alpha\,;\alpha\in\Omega\}$ハRノregular open coveringトスル.(即チ $F_\alpha\subset G_\alpha$ナル開被覆$\{F_\alpha\}$ガアルトスル) 而シテ$\mathfrak{G}$ノ濃度ヨリ小ナル濃度ヲモツ$\mathfrak{G}$ノsubsystemハ局所有限デアルトスル. 然ラバ dim R $\leqq n$ナラバ. $(\mathfrak{G})$-dim R $\leqq n$デアル.

コノ定理ノ系トシテハ直チニ次ノコトガ得ラレル.

系 $\mathfrak{G}$ガcountable regular open coveringデ dim R $\leqq n$ナラバ $(\mathfrak{G})$-dim R $\leqq n$デアル.

又定理1ノ証明ト同様ニシテ次ノ定理ガ証明サレル.

定理3 $\mathfrak{F}=\{F_\alpha\,;\alpha\in\Omega\}$ハRノ閉被覆デ. $\mathfrak{G}=\{G_\alpha\,;\alpha\in\Omega\}$ハ. $F_\alpha\subset G_\alpha$ヲミタス開被覆デ且ツ$\mathfrak{G}$ノ濃度ヨリ小ナル濃度ヲモツ$\mathfrak{G}$ノsubsystemハ局所有限トスル. 若シスベテノαニ對シ dim $F_\alpha\leqq n$ ガ成立スルナラバ. dim R $\leqq n$ ガ成立スル.

定理3カラ通常ノ加法定理ガ得ラレルコトハ明ラカデアロウ.

Hurewicz ガ可分距離空間ノ場合ニ証明シタ加法定理モ亦次ノ如ク拡張サレル.

$\boxed{\text{定理4}}$ $\mathfrak{G}=\{G_\alpha ; \alpha\in\Omega\}$ ハ R ノ局所有限ノ開被覆 $\{A_\lambda ; \lambda\in\Lambda\}$ ハ局所有限ノ閉集合系トスル. 若シ

$(\mathfrak{G})\text{-}\dim A_\lambda \leqq n$; $\lambda\neq\mu$ ナラバ $\dim A_\lambda\cdot A_\mu \leqq n-1$ ナラバ $(\mathfrak{G})\text{-}\dim \sum\limits_{\lambda} A_\lambda \leqq n$ ガ成立スル.

証明 先ヅ

$(\mathfrak{G})\text{-}\dim A\leqq n$; $(\mathfrak{G})\text{-}\dim B\leqq n$, $\dim A\cdot B\leqq n-1$ ナラバ, $(\mathfrak{G})\text{-}\dim [A+B]\leqq n$ ナルコトヲ証明スル.

仮定ニヨリ

(8) $A=\sum A_\alpha$, $B=\sum B_\alpha$

(9) $A_\alpha\subset U_\alpha\subset G_\alpha$, $B_\alpha\subset V_\alpha\subset G_\alpha$, $\alpha\in\Omega$

(10) $\{U_\alpha ; \alpha\in\Omega\}$ ノ次数 $\leqq n+1$, $\{V_\alpha ; \alpha\in\Omega\}$ ノ次数 $\leqq n+1$

ナル閉集合 A_α, B_α, 開集合 U_α, V_α ガ存在スル. $\dim A\cdot B\leqq n-1$ ナル故定理1ニヨリ,

(11) $AB\subset\sum\limits_{\lambda<\lambda_0} W_\lambda$

(12) $\{\overline{W}_\lambda, \lambda<\lambda_0\}$ ハ $\mathfrak{G}$, $\{U_\alpha, R-A_\alpha\}$, $\{V_\alpha, R-B_\alpha\}$ $\alpha\in\Omega$ ノ何レニ対シテモソノ refinement デアル.

(13) $\{\overline{W}_\lambda ; \lambda<\lambda_0\}$ ノ次数 $\leqq n$

ナル局所有限ノ開集合系 $\{W_\lambda ; \lambda<\lambda_0\}$ ガアル. ココデ λ_0 ハアル順序数トスル. 次ニ,

(14) $C=\sum\limits_{\alpha\in\Omega} C_\alpha$, $C_\alpha=B_\alpha(R-\sum\limits_{\lambda<\lambda_0} W_\lambda)$

トオケバ, C_α ハ閉集合デ且ツ $\{C_\alpha ; \alpha\in\Omega\}$ ハ局所有限デアル. 従テ $A\cdot C=0$ ナル故.

(15) $\overline{W}_1=E_1+F_1$, $E_1C=F_1A=0$

ナル閉集合 E_1, F_1 ガ存在スル. A, C, E_1F_1 ガ互ニ disjoint デアルカラ同様ニ

(16) $\overline{W}_2=E_2+F_2$, $E_2(C+E_1\cdot F_1)=F_2\cdot A=0$

ナル開集合 E_2. F_2 ガ存在スル。以下同様ニシテ $\lambda<\lambda_0$ ナルスベテノ λ ニ対シ

(17) $\overline{V_0}=E_\lambda+F_\lambda \qquad E_\lambda\big(C+\sum_{\nu<\lambda}E_\mu\cdot F_\mu\big)=F_\lambda\cdot A=0$

ナル開集合 E_λ F_λ ガアル。之等ノ E_λ, F_λ ニ対シテハ

(18) $A\cdot C=0.\quad E_\lambda\, C=0.\quad F_\lambda\cdot A=0$

(19) $\lambda\neq\mu$ ナラバ. $(E_\lambda\cdot F_\lambda)\cdot(E_\mu\cdot F_\mu)=0$

ガ成立スル, トコロデ (13) ト (19) カラ

(20) $\{E_\lambda\ \ \lambda<\lambda_0,\ F_\lambda,\ \ \lambda<\lambda_0\}$ ノ次数 $\leqq n+1$ ノ成立スルコト

ガ証明サレル.

$A\,E_\lambda=0$ ナル E_λ ヲ E_μ. $\mu<\mu_0$ トシ. $C\cdot F_\lambda=0$ ナル F_λ ヲ F_ν $\nu<\nu_0$ ト命名スル. $A_\alpha\cdot E_\lambda\neq 0$ ナル E_λ ノ和集合ヲ E'_α トスル. 但シ $A_\alpha E_\lambda\neq 0$ $A_\beta\cdot E_\lambda\neq 0$ ナル E_λ ハ何レカ唯一ツノ E'_α ノ中ヘ繰入レテオクモノトスル. 同様ニ C_α $F_\lambda\neq 0$ ナルイクツカノ F_λ ノ和集合ヲ F'_α トス. C $F_\lambda\neq 0$ ナル F_λ ハ之等ノ何レカ唯一ツノ F'_α ニ含マレルモノトスル。然ルトキハ定理1ノ証明ニ於ケル如ク.

(21)、$A_\alpha+E'_\alpha\subset U_\alpha$. $C_\alpha+F'_\alpha\subset V_\alpha$

ガ成立スル。扨テ

$$L=\prod_{i=1}^{r}(A_{\alpha_i}+E'_{\alpha_i})\prod_{i=1}^{s}(C_{\beta_i}+F'_{\beta_i})\prod_{i=1}^{u}E''_{\mu_i}\prod_{i=1}^{v}F''_{\nu_i}\neq 0$$

トスレバ $r+s+u+v\leqq n+1$ デアル.

何トナレバ

1) $u\geqq 1$ ナラバ (18) ヨリ $L=\prod E'_{\alpha_i}\prod F'_{\beta_i}\prod E''_{\mu_i}\prod F''_{\nu_i}$

従ッテ (20) ヨリ $r+s+u+v\leqq n+1$

2) $v\geqq 1$ ナルトキハ 1) ト同様

3) $u=v=0$ ナルトキハ

イ) $r\geqq 1$. $s\geqq 1$ ナラバ (18) ニヨリ $L=\prod E'_{\alpha_i}\prod F'_{\beta_i}$

ヨッテ (20) ヨリ $r+s\leqq n+1$

ロ) $r=0$ ナラバ (10). (21) ヨリ $s\leqq n+1$

ハ) $s=0$ ナルトキハ ロ) ト同様

デアルカラ

ソコデ

$$B_\alpha' = \Bigl(C_\alpha + E_\alpha' + F_\alpha' + \sum_{E_\mu''\subset G_\alpha} E_\mu'' + \sum_{F_\mu''\subset G_\alpha} F_\mu''\Bigr)\cdot B$$

トオケバ　$B_\alpha' \subset G_\alpha$ デ B_α ハ開集合．且ツ

$\mathfrak{F} = \{A_\alpha + B_\alpha' ; \alpha \in \Omega\}$ ハ $A+B$ ノ開被覆デ、ソノ次数ハ上ノコトヨリ高々 $n+1$ ナルコトガ分ル。従ッテ $(\mathfrak{F})$-dim $[A+B] \leqq n$ ガ成立スル。コノ証明カラ一般ニ定理ノ成立ガ知ラレル。

Zorn ノ補題ヲ用ヒレバ　コノ定理カラ、n次元ノ bicompact ナ R ガ n次元ノ Cantor manifold ヲ含マヌコトガ証明サレルコトヲ注意シテ置カウ．